Asymptotic comparison between the maximum likelihood estimator and Bayes estimator for a certain truncated exponential family (Bayes Inference and Its Related Topics)

数理解析研究所講究録
第2047巻 2017年 172-181

Asymptotic comparison between the maximum likelihood estimator and Bayes estimator for a certain truncated exponential family

筑波大・赤平　昌文 (Masafumi Akahira)
(University of Tsukuba)

1. はじめに

従来，適当な正則条件を満たす滑らかな分布族として正則分布族，そうでない分布族として非正則分布族として分けて母数に関する統計的推測について論じることが多かった．正則な場合には高次漸近理論の観点から最尤推定量 (MLE), Bayes 推定量等が偏り補正すれば母数の周りへの漸近集中確率の意味で高次まで漸近的に最良であることが示された (Akahira and Takeuchi [AkT81], Pfanzagl and Wefelmeyer [PW85], Ghosh [G94])．しかし非正則な場合の一つの例として両側切断正規分布の位置母数の推定問題において，Pitman 推定量が最大確率推定量，MLE より漸近的に良いことが知られている ([AkT79])．一方，正則と非正則の両方の性質を併せ持つ分布族として切断指数型分布族 $\mathcal{P}$ は典型的で極めて有用である．実際，応用上よく用いられる切断指数分布，(上側切断)Pareto 分布等は $\mathcal{P}$ に含まれる (Voinov and Nikulin [VN93], Arnold [Ar15])．ここで，$\mathcal{P}$ の分布がもつ自然母数は正則な構造を特徴付け，切断母数は非正則な構造を特徴付けていると見なされ得る．

いま，分布族 $\mathcal{P}$ において自然母数と切断母数の一方が既知 (未知) のときに，$\mathcal{P}$ に属する分布からの大きさ n の無作為標本に基づく他方の母数の推定量を $S_n^{(0)}(S_n^{(1)})$ とするとき，それらの 2 次の漸近分散を用いて $S_n^{(0)}$ に対する $S_n^{(1)}$ の 2 次の漸近損失を考えることができ，それに関する一連の結果が得られている ([Ak15], [Ak16a], [Ak16b], [AkHKO16]), [AkO16], [AkO17])．また，2 つの切断母数をもつ上側切断 Pareto 分布の場合の推定問題は Aban et al. [AMP06], Beg [Be81] 等で論じられている．本稿では分布族 $\mathcal{P}$ において自然母数が既知の場合に切断母数の MLE と Bayes 推定量を 3 次のオーダー (order) まで漸近的に比較し，いくつかの例を挙げる．

2. 片側切断指数型分布族

まず，Bar-Lev [B84] と同様にして Lebesgue 測度に関する密度

$$f(x;\theta,\gamma) = \begin{cases} \dfrac{a(x)e^{\theta u(x)}}{b(\theta,\gamma)} & (c < \gamma \leq x < d), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで，$-\infty \leq c < d \leq \infty$ とし，$a(\cdot)$ はほとんど至るところで非負値で連続とし，$u(\cdot)$ は区間 (γ, d) 上で絶対連続で $du(x)/dx \neq 0$ とする．各 $\gamma \in (c,d)$ に対して

$$\Theta(\gamma) := \left\{ \theta \,\middle|\, 0 < b(\theta,\gamma) := \int_\gamma^d a(x)e^{\theta u(x)}dx < \infty \right\} \tag{2}$$

とすると，$\gamma_1 < \gamma_2$ となる任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in (c,d)$ について $\Theta(\gamma_1) \subset \Theta(\gamma_2)$ になる．いま，任意の $\gamma \in (c,d)$ について，$\Theta \equiv \Theta(\gamma)$ は $\mathbf{R}^1$ の空でない開集合と仮定し，密度 (1) をもつ分布 $P_{\theta,\gamma}$ の族 $\mathcal{P}_o := \{P_{\theta,\gamma} | \theta \in \Theta,\ \gamma \in (c,d)\}$ を自然母数 θ と切断母数 γ をもつ片側切断指数型分布族 (one-sided truncated exponential familiy (oTEF) of distributions) と言う．厳密には下側切断指数型分布族とも言う．もし，γ が既知であれば，oTEF は通常の正則な指数型分布族になることに注意.

さて，$X_1, X_2, \cdots, X_n \cdots$ を互いに独立にいずれも密度 (1) をもつ oTEF の分布 $P_{\theta,\gamma}$ に従う確率変数列とする．このとき，Bar-Lev [B84] は，γ を未知の局外母数として θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}$ を考え，それの比較対象として順序統計量 $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ について $X_{(1)} = x_{(1)}$ を与えたときの $(X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ の条件付密度から作られる θ の条件付尤度関数を最大にする最尤条件尤度推定量 (maximum conditional likelihood estimator) $\hat{\theta}_{MCL}$ を取り扱った．そして，それらと，γ が既知のときの θ の MLE $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ との漸近的比較を行った．実際，$n \to \infty$ のとき $\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は θ の強一致推定量であり，$\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と同じ極限分布をもつことを示した．また Akahira [Ak16a] は $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$，偏り補正した MLE $\hat{\theta}_{ML^*}$，$\hat{\theta}_{MCL}$ の 2 次の確率展開 (stochastic expansion) を用いて，2 次の漸近分散を求め，$\hat{\theta}_{ML^*}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は 2 次のオーダーまで漸近的に同等であるが，これらは $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ より 2 次のオーダーでは漸近的に悪くなることを示し，それらの 2 次の漸近損失を求めた．一方，θ を局外母数として γ の推定問題において，θ が既知のときの γ の補正 MLE を $\hat{\gamma}_{ML^*}^{\theta}$ とし θ が未知のときの γ の補正 MLE を $\hat{\gamma}_{ML^*}$ とする．このとき，それらの 2 次の確率展開を用いて，2 次の漸近平均，漸近分散を求め，$\hat{\gamma}_{ML^*}^{\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{ML^*}$ の 2 次の漸近損失を求めた ([AkO17])．さらに，Akahira [Ak16b] は，θ が既知のときに γ の Bayes 推定量 $\hat{\gamma}_{B,\theta}$ と θ が未知のときに $\hat{\theta}_{ML}$ を θ に代用して γ の Bayes 推定量 $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ を考え，それらの 2 次の確率展開を用いて，2 次の漸近分散を求め，$\hat{\gamma}_{B,\theta}$ に対する $\hat{\gamma}_{B,\hat{\theta}_{ML}}$ の 2 次の漸近損失を求めた.

本稿では分布族 $\mathcal{P}_o$ において，θ を既知としたときに γ の MLE $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML}$，Bayes 推定量 $\hat{\gamma}^{\theta}_{B}$ の 3 次の確率展開を求め，それらをそれぞれ偏り補正した $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$，$\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ の漸近分散を 3 次のオーダーまで比較する．

3. 補正最尤推定量の 3 次の漸近的挙動

まず，θ は既知であるから $\gamma \leq x_{(1)} := \min_{1\leq i\leq n} x_i$，$x_{(n)} := \max_{1\leq i\leq n} x_i < d$ を満たす $\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n)$ が与えられたとき，γ の尤度関数は

$$L^{\theta}(\gamma; \boldsymbol{x}) := \frac{1}{b^n(\theta,\gamma)}\left\{\prod_{i=1}^{n} a(x_i)\right\}\exp\left\{\theta\sum_{i=1}^{n} u(x_i)\right\}$$

となる．よって，γ の MLE $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML}$ は $X_{(1)} := \min_{1\leq i\leq n} X_i$ になる．このとき $T_{(1)} := n(X_{(1)} - \gamma)$ とし，

$$k(\theta,\gamma) := \frac{a(\gamma)e^{\theta u(\gamma)}}{b(\theta,\gamma)} \tag{3}$$

とおいて，[AkO17] の定理 3.1 と同様に γ の偏り補正 MLE

$$\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*} = X^*_{(1)} := X_{(1)} - \frac{1}{\hat{k}_{\theta} n} \tag{4}$$

を考える．ただし $\hat{k}_{\theta} = k(\theta, X_{(1)})$ とする．このとき，$T^*_{(1)} := n(X^*_{(1)} - \gamma)$ の 2 次の確率展開，漸近平均，漸近分散は [AkO17] の定理 3.1 で与えられているが，それらを更に拡張して精密な結果として次のことを得る．

定理 1. 密度 (1) をもつ oTEF $\mathcal{P}_o$ において，$T^*_{(1)}$ の 3 次の確率展開は

$$T^*_{(1)} = T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{k_{(1)}}{kn}T_{(1)} - \frac{1}{2kn^2}(k^2_{(1)} - k_{(2)})T^2_{(1)} + O_p\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{5}$$

である．ただし，$k = k(\theta,\gamma)$,

$$k_{(j)} = k_{(j)}(\theta,\gamma) = \frac{\partial^j}{\partial\gamma^j}\log k(\theta,\gamma) \quad (j = 1, 2)$$

とする．また，$T^*_{(1)}$ の 3 次の漸近平均，漸近分散は

$$E_{\gamma}\left[T^*_{(1)}\right] = \frac{2}{kn^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{6}$$

$$V_{\gamma}\left(T^*_{(1)}\right) = \frac{1}{k^2} - \frac{2k_{(1)}}{k^3 n} + \frac{2}{k^4 n^2}(6k^2 - k_{(2)}) + \frac{6k^2_{(1)}}{k^4 n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{7}$$

である．

4. 補正 Bayes 推定量の 3 次の漸近的挙動

いま，$\pi(\gamma)$ を開区間 (c,d) 上で Lebesgue 測度に関する事前密度とし，$\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく γ の推定量 $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\boldsymbol{X})$ の 2 乗損失 $L(\hat{\gamma}, \gamma) = (\hat{\gamma} - \gamma)^2$ を考える．このとき，θ は既知であるから，L と π に関する Bayes 推定量は

$$\hat{\gamma}_B^\theta(\boldsymbol{X}) := \int_c^{X_{(1)}} \frac{t\pi(t)}{b^n(\theta,t)} dt \Big/ \int_c^{X_{(1)}} \frac{\pi(t)}{b^n(\theta,t)} dt \tag{8}$$

になる．ここで $a(\cdot)$，$u(\cdot)$ は区間 (c,d) において C^4 級の関数とし，$\pi(\cdot)$ を C^3 級の関数とする．まず，$u = n(t-\gamma)$ とおいて (8) を変形すれば

$$\hat{\gamma}_B(\boldsymbol{X}) = \gamma + \frac{1}{n}\left\{ \int_{\tau_n}^{T_{(1)}} \frac{u\pi(\gamma + (u/n))}{b^n(\theta, \gamma + (u/n))} du \Big/ \int_{\tau_n}^{T_{(1)}} \frac{\pi(\gamma + (u/n))}{b^n(\theta, \gamma + (u/n))} du \right\}$$

になる．ただし，$\tau_n := n(c-\gamma)$ とする．このとき，$T_B^\theta := n(\hat{\gamma}_B^\theta - \gamma)$ の 2 次の確率展開，漸近平均，漸近分散は [Ak16b] において与えられている．ここで，$\hat{\gamma}_B^\theta$ も偏り補正して

$$\hat{\gamma}_{B^*}^\theta(\boldsymbol{X}) := \hat{\gamma}_B^\theta(\boldsymbol{X}) + \frac{2k_{(1)}(\theta, X_{(1)}) - \pi_{(1)}(X_{(1)})}{n^2 k^2(\theta, X_{(1)})}$$

とする．ただし，$\pi_{(1)}(\gamma) := (d/d\gamma)\log \pi(\gamma)$ とする．このとき，$T_{B^*}^\theta := n(\hat{\gamma}_{B^*}^\theta - \gamma)$ とおいて [Ak16b] の結果を拡張して次のように精密化する．

定理 2. 密度 (1) をもつ oTEF $\mathcal{P}_o$ において，$T_{B^*}^\theta$ の 3 次の確率展開は

$$T_{B^*}^\theta = T_{(1)} - \frac{1}{k} + \frac{k_{(1)}}{kn} T_{(1)} + \frac{1}{n^2} R + O_p\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{9}$$

である．ただし，$\pi_{(2)} = (d^2/d\gamma^2)\log\pi(\gamma)$，$\tilde{T}_{(1)} := T_{(1)} - (1/k)$ とし

$$\begin{aligned} R := &-\frac{5}{2}k_{(1)}^2 \tilde{T}_{(1)}^3 + \frac{1}{2k}\left(14k_{(1)}^2 + k_{(2)}\right)\tilde{T}_{(1)}^2 - \frac{1}{k^2}\left(k_{(1)}^2 - k_{(2)}\right)\tilde{T}_{(1)} \\ &- \frac{1}{k^3}\left(\frac{15}{2}k_{(1)}^2 - \frac{7}{2}k_{(2)} - 6k_{(1)}\pi_{(1)} + \pi_{(1)}^2 + 2\pi_{(2)}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

とする．また，$T_{B^*}^\theta$ の 3 次の漸近平均，漸近分散は

$$E_\gamma\left[T_{B^*}^\theta\right] = \frac{1}{k^3 n^2}\left(2k^2 - \frac{9}{2}k_{(1)}^2 + 3k_{(2)} + 6k_{(1)}\pi_{(1)} - \pi_{(1)}^2 - 2\pi_{(2)}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{11}$$

$$V_\gamma\left(T_{B^*}^\theta\right) = \frac{1}{k^2} - \frac{2k_{(1)}}{k^3 n} + \frac{2}{k^4 n^2}(6k^2 - k_{(2)}) - \frac{9k_{(1)}^2}{k^4 n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{12}$$

である.

注意 **1**. 上記の (12) から分かるように T^{θ}_{B*} の 3 次の漸近分散は $o(n^{-2})$ まで事前密度 π に無関係.

5. 補正 MLE と補正 Bayes 推定量の 3 次の漸近的比較

まず，第 3，4 節の (6)，(11) より $T^*_{(1)}$ と T^{θ}_{B*} の 3 次の漸近平均の差は

$$
\begin{aligned}
&E_{\gamma}\left[kT^*_{(1)}\right] - E_{\gamma}\left[kT^{\theta}_{B*}\right] \\
&= \frac{1}{k^2n^2}\left(\frac{9}{2}k^2_{(1)} - 3k_{(2)} - 6k_{(1)}\pi_{(1)} + \pi^2_{(1)} + 2\pi_{(2)}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

となり，n^{-2} のオーダーでは事前密度 π に依存することが分かる．また定理 1，2 から γ の補正 MLE $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}$ と補正 Bayes 推定量 $\hat{\gamma}^{\theta}_{B*}$ の 3 次の漸近的差異は次のようになる.

定理 **3**. 密度 (1) をもつ oTEF $\mathcal{P}_o$ において，$\hat{\gamma}^{\theta}_{B*}$ に対する $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}$ の 3 次の漸近損失は

$$
d^{(3)}_{(n)}(\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}, \hat{\gamma}^{\theta}_{B*}) := n^2\left\{V_{\gamma}\left(kT^*_{(1)}\right) - V_{\gamma}\left(kT^{\theta}_{B*}\right)\right\} = 15\left(\frac{k_{(1)}}{k}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{13}
$$

である.

注意 **2**. まず，(13) から分かるように $\hat{\gamma}^{\theta}_{B*}$ に対する $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}$ の 3 次の漸近損失は事前密度に無関係になる．また，(13) より $k_{(1)}(\theta,\gamma) = 0$ ならば $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}$ と $\hat{\gamma}^{\theta}_{B*}$ は 3 次のオーダーまで漸近的に同等であるが，$k_{(1)}(\theta,\gamma) \neq 0$ ならば $\hat{\gamma}^{\theta}_{B*}$ は $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}$ より 3 次のオーダーでは漸近的に良くなることが分かる．さらに，$k_{(1)}(\theta,\gamma) = 0$ となるのは切断指数分布の場合に限られることも示され得る．なお，(5)，(9) から $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}$ と $\hat{\gamma}^{\theta}_{B*}$ は 2 次のオーダーまでは漸近的に同等であり，

$$
d^{(2)}_{(n)}(\hat{\gamma}^{\theta}_{ML*}, \hat{\gamma}^{\theta}_{B*}) := n\left\{V_{\gamma}\left(kT^*_{(1)}\right) - V_{\gamma}\left(kT^{\theta}_{B*}\right)\right\} = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

であることに注意.

6. 例

片側切断指数型分布 $\mathcal{P}_o$ に属する下側切断指数分布，下側切断正規分布，Pareto 分布の場合を考える ([Ak17]).

例 **1** **(下側切断指数分布)**. 密度 (1) において，$c = -\infty$，$d = \infty$，$a(x) \equiv 1$，$u(x) =$

$-x$ $(-\infty < \gamma \leq x < \infty)$ とすると，(2) より $b(\theta, \gamma) = \theta^{-1}e^{-\theta\gamma}$ $(\theta \in \Theta = (0, \infty))$ となるから，(3) より $k(\theta, \gamma) = \theta$，$k_{(1)}(\theta, \gamma) = k_{(2)}(\theta, \gamma) = 0$ になる．いま，事前密度 $\pi(\gamma)$ として標準正規分布 $N(0, 1)$ の密度を取れば $\pi_{(1)}(\gamma) = -\gamma$，$\pi_{(2)}(\gamma) = -1$ になる．このとき，(4) より補正 MLE は $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*} = X_{(1)} - (n\theta)^{-1}$ になり，(5) より

$$T^*_{(1)} = T_{(1)} - \frac{1}{\theta} + O_P\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になり，(6)，(7) より

$$E_\gamma[T^*_{(1)}] = \frac{2}{n^2\theta} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad V_\gamma(T^*_{(1)}) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{12}{n^2\theta^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になる．一方，γ の補正 Bayes 推定量 $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ について (9)，(10) より

$$T^{\theta}_{B^*} = \tilde{T}_{(1)} - \frac{1}{n^2\theta^3}(\gamma^2 - 2) + O_p\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になり，(11)，(12) より

$$E_\gamma[T^{\theta}_{B^*}] = \frac{1}{n^2\theta^3}(2\theta^2 - \gamma^2 + 2) + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
$$V_\gamma(T^{\theta}_{B^*}) = \frac{1}{\theta^2} + \frac{12}{n^2\theta^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になる．ここで，$\tilde{T}_{(1)} = T_{(1)} - (1/\theta) = n(X_{(1)} - \gamma) - (1/\theta)$ である．また，(13) より $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ に対する $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ の 3 次の漸近損失は

$$d^{(3)}_{(n)}(\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}, \hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}) = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

になり，$\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ と $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ は 3 次のオーダーまで漸近的に同等になる．

例 2 **(下側切断正規分布)．** 密度 (1) において，$c = -\infty$，$d = \infty$，$a(x) = e^{-x^2/2}$，$u(x) = x$ $(-\infty < \gamma \leq x < \infty)$ とすると，(2) より $b(\theta, \gamma) = \Phi(\theta - \gamma)/\phi(\theta)$ $(\theta \in \Theta = (-\infty, \infty))$ となるから

$$k(\theta, \gamma) = \frac{\phi(\theta - \gamma)}{\Phi(\theta - \gamma)} =: \rho(\theta - \gamma)$$

になる．ただし，

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt, \qquad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \quad (-\infty < t < \infty)$$

とする．ここで

$$k_{(1)}(\theta,\gamma)=\theta-\gamma+\rho(\theta-\gamma),$$
$$k_{(2)}(\theta,\gamma)=-1+(\theta-\gamma)\rho(\theta-\gamma)+\rho^2(\theta-\gamma)$$

になる．いま，事前密度 $\pi(\gamma)$ を $N(0,1)$ の密度とすれば $\pi_{(1)}(\gamma)=-\gamma$，$\pi_{(2)}(\gamma)=-1$ になる．このとき，(4) より補正 MLE は

$$\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}=X_{(1)}-\frac{1}{n\rho(\theta-X_{(1)})}$$

になり，(5) より

$$\begin{aligned}T^*_{(1)}=&T_{(1)}-\frac{1}{\rho(\theta-\gamma)}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{\theta-\gamma}{\rho(\theta-\gamma)}\right)T_{(1)}\\&-\frac{1}{2n^2\rho(\theta-\gamma)}\{1+(\theta-\gamma)\rho(\theta-\gamma)+(\theta-\gamma)^2\}T^2_{(1)}+O_P\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

になり，(6)，(7) より

$$\begin{aligned}E_\gamma\left[T^*_{(1)}\right]=&\frac{2}{n^2\rho(\theta-\gamma)}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),\\V_\gamma\left(T^*_{(1)}\right)=&\frac{1}{\rho^2(\theta-\gamma)}-\frac{2}{n\rho^3(\theta-\gamma)}\{\theta-\gamma+\rho(\theta-\gamma)\}\\&+\frac{2}{n^2\rho^4(\theta-\gamma)}\{1-(\theta-\gamma)\rho(\theta-\gamma)+5\rho^2(\theta-\gamma)\}\\&+\frac{6}{n^2\rho^2(\theta-\gamma)}\left\{1+\frac{\theta-\gamma}{\rho(\theta-\gamma)}\right\}^2+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

になる．同様にして (9)–(12) より $T^{\theta}_{B^*}$ の 3 次の確率展開，漸近平均，漸近分散が得られる．また，(13) より $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ に対する $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ の 3 次の漸近損失は

$$d^{(3)}_{(n)}(\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*},\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*})=15\left\{1+\frac{\theta-\gamma}{\rho(\theta-\gamma)}\right\}^2+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる．

例 3 (Pareto 分布). 密度 (1) において，$c=0$，$d=\infty$，$a(x)=1/x$，$u(x)=-\log x$ $(0<\gamma\le x<\infty)$ とすると，(2) より $b(\theta,\gamma)=\theta^{-1}\gamma^{-\theta}$ $(\theta\in\Theta=(0,\infty))$ となるから，(3) より $k(\theta,\gamma)=\theta/\gamma$，$k_{(1)}(\theta,\gamma)=-\gamma^{-1}$，$k_{(2)}(\theta,\gamma)=\gamma^{-2}$ になる．いま，事前密度として

$\pi(\gamma) = e^{-\gamma}$ $(\gamma > 0)$ を取れば $\pi_{(1)}(\gamma) = -1$, $\pi_{(2)}(\gamma) = 0$ になる．このとき，(4) より補正 MLE は

$$\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*} = \left(1 - \frac{1}{n\theta}\right) X_{(1)}$$

となり，(5) より

$$T^*_{(1)} = T_{(1)} - \frac{\gamma}{\theta} - \frac{1}{n\theta} T_{(1)} + O_p\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になる．また，(6)，(7) より

$$E_{\gamma}\left[T^*_{(1)}\right] = \frac{2\gamma}{n^2\theta} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$
$$V_{\gamma}\left(T^*_{(1)}\right) = \frac{\gamma^2}{\theta^2} + \frac{2\gamma^2}{n\theta^3} + \frac{4\gamma^2}{n^2\theta^2}\left(3 + \frac{1}{\theta^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になる．同様にして (9)–(12) より $T^{\theta}_{B^*}$ の 3 次の確率展開，漸近平均，漸近分散が得られる．また，(13) より $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ に対する $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ の 3 次の漸近損失は

$$D(\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}, \hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}) = \frac{15}{\theta^2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

になり，γ に無関係．

7. おわりに

本稿では，自然母数 θ と切断母数 γ をもつ oTEF において，θ が既知のときに γ の補正 MLE $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ に対する補正 Bayes 推定量 $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ の 3 次の漸近損失が非負であることを示した．これは $\hat{\gamma}^{\theta}_{B^*}$ が $\hat{\gamma}^{\theta}_{ML^*}$ より 3 次のオーダーまで漸近的に悪くならないことを意味する．さらに，θ が未知のときに，上記と同様なことが成り立つか否かは興味深い．その際 [Ak16] のアプローチが有効に見えるが面倒な計算が必要になるであろう．

参考文献

[AMP06] Aban, I. B., Meerschaert, M. M. and Panorska, A. K. (2006). Parameter estimation for the truncated Pareto distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **101**, 270–277.

[Ak15] Akahira, M. (2015). Asymptotic comparison in maximum likelihood estimation of a natural parameter up to the second order for a truncated exponential family of distributions. (In Japanese). *RIMS (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University) Kôkyûroku,* **1954**, 134–150.

[Ak16a] Akahira, M. (2016a). Second order asymptotic comparison of the MLE and MCLE of a natural parameter for a truncated exponential family of distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **68**, 469–490.

[Ak16b] Akahira, M. (2016b). Second order asymptotic variance of the Bayes estimator of a truncation parameter for a one-sided truncated exponential family of distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **46**, 81–98.

[Ak17] Akahira, M. (2017). Statistical Estimation for Truncated Exponential Families. To appear.

[AkHKO16] Akahira, M., Hashimoto, S., Koike, K. and Ohyauchi, N. (2016). Second order asymptotic comparison of the MLE and MCLE for a two-sided truncated exponential family of distributions. *Commun. Statist. – Theory and Meth.*, **45**, 5637–5659.

[AkO16] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2016). Second order asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a two-sided truncated exponential family of distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **46**, 27–50.

[AkO17] Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2017). Second-order asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a truncated exponential family of distributions. *Commun. Statist. – Theory and Meth.*, **46**, 6085–6097.

[AkT79] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1979). Remarks on the asymptotic efficiency and inefficiency of maximum probability estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE* **26**, 132–138. Also included In: *"Joint Statistical Papers of Akahira and Takeuchi,"* World Scientific, New York, 2003.

[AkT81] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). *Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency.* Lecture Notes in Statistics **7**, Springer, New York.

[Ar15] Arnold, B. C. (2015). *Pareto Distributions.* 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.

[B84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter of a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[Be81] Beg, M. A. (1981). Estimation of the tail probability of the truncated Pareto distribution. *J. Infor. & Opti. Sci.*, **3**, 251–274..

[G94] Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics.* NSF-CBMS Regional Conference Series Probab. and Statist., **4**, Inst. of Math. Statist., Hayward, California.

[PW85] Pfanzagl, J. and Wefelmeyer, W. (1985). *Asymptotic Expansions for General Statistical Models.* Lecture Notes in Statistics **31**, Springer, Berlin.

[VN93] Voinov, V. G. and Nikulin, M. S. (1993). *Unbiased Estimaters and Their Applications, Vol. 1: Univariate Case.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.